Домашно №2, Задача 1 по Алгебра 2 на Компютърни Науки

Камен Димитров Младенов, Група 6

12 Май 2023

Решение

Търсим n, за което $\exists! a, b \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0,1\} : ab \equiv 0 \pmod{n}$, тоест a и b са (единствените) такива, че $ab = 0 + kn = kn$ за някое $k \in \mathbb{Z}$. Допълнително премахваме 1, понеже ако б.о.о. $a = 1$, то $ab = 1b = b \neq kn$ за всяко k и n.

Ако n е просто, няма делители на нулата, понеже ако представим двете страни на $ab = kn$ като умножения на прости числа, няма как лявата страна да съдържа n (и няма как да има равенство).

Нека фиксираме най-малките прости числа $c, d \in \{2, ..., n-1\}$, които удовлетворяват $n = c.d$. Тогава със сигурност ще имаме поне един делител на нулата, при $a = c$ и $b = d$, $ab = cd = n$.

За всяко $1 < k < n$, за което можем да представим б.о.о. a като $c.k \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0,1\}$, ab ще бъде "нов" различен делител на нулата: $ab = c.k.d = k.cd = kn \neq n$.

Тоест, искаме за всяко такова k и всяко $z \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0,1\}$, $k.z \notin \mathbb{Z}_n \setminus \{0,1\}$. Най-малките им възможни стойности са $k = 2 = z$, тоест искаме $kz = 4 \notin \mathbb{Z}_n$, значи $n \in \{1, ..., 4\}$. За $n = 1$ и $n = 2$, $\mathbb{Z}_n \setminus \{0,1\} = \emptyset$, за $n = 3$, няма делител на нулата.

Следователно, отговорът е $n = 4$.